COBEM 99
XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica
15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering
22 - 26 de Novembro de 1999 / November 22 - 26, 1999 Águas de Lindóia, São Paulo,

# UMA LEI DO ATRITO PARA O ESCOAMENTO DE FLUXOS SANGUÍNEOS TURBULENTOS

**DANIEL A. CRUZ.**
*Universidade Federal do Pará. Departamento de Engenharia Mecânica.*
CEP 66075-110 – Belém, Pa, Brasil

**JERSON R. P. VAZ**
*Universidade Federal do Pará. Departamento de Engenharia Mecânica.*
CEP 66075-110 – Belém, Pa, Brasil

***Resumo.*** *A análise de escoamentos turbulentos de fluidos não-Newtonianos permanece ainda hoje como um dos grandes problemas da mecânica dos fluidos. Apesar de sua importância, poucos trabalhos são encontrados na literatura que analisam detalhadamente os fenômenos relativos ao escoamento de fluidos não-Newtonianos no regime turbulento. Dentre os principais fenômenos envolvidos com esse tipo de análise, destaca-se o fluxo sangüíneo em veias e artérias. O estudo do fluxo de sangue é de grande importância não apenas do ponto de vista científico, como também na análise de questões mais práticas envolvendo o projeto e construção de órgãos artificiais, e o diagnóstico de enfermidades. Vários modelos reológicos são empregados na modelagem do escoamento de sangue, dentre eles podemos destacar o de Casson como estando entre os mais populares. No presente trabalho, uma extensão da equação do atrito para fluidos Newtonianos aplicável aos escoamentos turbulentos em dutos será obtida para o caso do escoamento de sangue, utilizando o modelo reológico de Casson. Será mostrado, que a formulação proposta envolve uma relação logarítimica que contém a expressão clássica Newtoniana como um caso particular. Uma comparação com dados experimentais será feita mostrando boa concordância.*

***Palavras-Chave:*** *Turbulência, hemodinâmica, dutos*

## 1. INTRODUÇÃO

A analise do escoamento turbulento de fluidos não-Newtonianos, apresenta um grande desafio a ciência da mecânica dos fluidos. Dentre os principais problemas relativos a esse tipo de fenômeno, está o escoamento de sangue em veias e artérias. A descrição adequada desse tipo de escoamento vem se tornando cada vez mais importante, principalmente na obtenção do diagnóstico de patologia e no dimensionamento e confecção de órgãos artificiais. Apesar dessa importância são poucos os trabalhos encontrados na literatura que tratam do fluxo sanguíneo, especialmente no caso turbulento. Uma grande dificuldade da análise do fluxo de sangue turbulento, é devido a maioria dos parâmetros e relações características do escoamento turbulento, como por exemplo, a conhecida correlação de Colebrook (1938) para escoamento em dutos, terem sido obtidas utilizando a hipótese Newtoniana como modelo reológico. Vários resultados experimentais (Liepsch 1986, Rodkiewicz, C. M 1990) indicam que o escoamento de sangue deve se comportar como um fluido não Newtoniano mesmo em largas artérias e que, o fluxo sangüíneo somente pode ser tratado de modo semelhante ao caso Newtoniano quando submetido a elevadas tensões de cizalhamento.( Caro, C. G. *et al*., 1978).

No presente trabalho será apresentada uma versão da lei da parede válida para escoamentos de sangue, deduzida utilizando a formulação de Casson (1959) para a descrição das tensões moleculares. O modelo de Casson tem sido largamente utilizado nas simulações numéricas do fluxo sangüíneo mostrando bons resultados (S. Oka, 1965. A. Brasil *et al.* 1998 Stoltz, J. F,1970). Na obtenção dessa lei será utilizada uma nova velocidade característica a qual contém a clássica velocidade fricção como caso particular. A dedução do resultado será feita sem a utilização de um modelo de turbulência para a descrição das tensões de Reynolds. Uma relação para o cálculo da perda de carga do escoamento turbulento de sangue no interior de dutos, fundamentada na lei da parede proposta, será mostrada. Os resultados obtidos serão comparados com o caso Newtoniano visando analisar a influência da tensão limite inicial sobre o escoamento.

## 2. A LEI DA PAREDE SANGUÍNEA

O escoamento de sangue pode ser analisado como sendo uma suspensão de partículas (células) em um líquido (plasma). A descrição das tensões moleculares nesse tipo de fluxo é bastante complexa, tendo motivado a criação de vários modelos reológicos para a descrição do fenômeno. Dentre esses modelos a formulação proposta por Casson (1959) destaca-se como estando entre as mais populares. Nessa formulação as tensões moleculares são descritas, no presente caso, de acordo com a expressão:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_o} + \sqrt{\bar{\lambda}\frac{\partial u}{\partial y}} \tag{1}$$

onde $\tau$ é a tensão na de cisalhamento, $\tau_o$ é a tensão limite, $\bar{\lambda}$ representa a viscosidade e u e y são a velocidade tangente a superfície sólida e a coordenada normal a essa superfície respectivamente. Será deduzido abaixo uma expressão para o perfil de velocidade média do escoamento turbulento próximo a superfícies sólidas. No presente caso o escoamento ocorre de forma incompressível, obedecendo as condições de não deslizamento e impenetrabilidade, atendendo as hipóteses de camada limite, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial y} >> \frac{\partial}{\partial x} \tag{2}$$

Como primeiro passo para a obtenção da lei da parede deve-se primeiramente descobrir as variáveis características do escoamento próximo a superfície sólida. Isto pode ser feito analisando-se o perfil de velocidade do escoamento na subcamada viscosa, muito próximo a parede. Nessa região, o transporte de quantidade de movimento ocorre, causado principalmente pelas tensões moleculares, uma vez que o transporte de quantidade de movimento por convecção e pelas tensões turbulentas são desprezíveis devido as condições de não deslizamento e impenetrabilidade. Portanto nessa região as equações da conservação da quantidade de movimento, podem ser escritas da seguinte forma, de acordo com a Eq.(2) :

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

Substituindo a Eq.(1) em (3) e resolvendo a integral, tem-se:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\tau_o}{\rho} + 2\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}\lambda\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \lambda\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \tag{4}$$

onde $\tau_w$ é a tensão na parede, $\rho$ é a massa específica e $\lambda = \bar{\lambda}/\rho$. $\bar{u}$ representa o perfil de velocidade média do escoamento. Desenvolvendo-se a Eq.(4) para o gradiente de velocidade média obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\left(\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}\right)^2}{\lambda} \tag{5}$$

A qual fornece após a resolução da integral a da aplicação da condição de não deslizamento, a seguinte relação para o perfil de velocidade na subcamada viscosa:

$$\bar{u} = \frac{\left(\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}\right)^2}{\lambda} y \tag{6}$$

A Eq.(6) pode ser rescrita da seguinte forma adimensional:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{\lambda} y \tag{7}$$

A relação (7) mostra que a velocidade média do escoamento de sangue na subcamada viscosa varia linearmente, de modo semelhante ao caso Newtoniano. Contudo, a velocidade característica utilizada na adimencionalização do perfil de velocidade média fica, neste caso, sendo descrita pela relação abaixo:

$$u_c = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \tag{8}$$

onde $u_c$ representa a velocidade característica a qual se reduz à relação válida para o caso Newtoniano quando $\tau_o$ =0, ou seja:

$$u_c = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \tag{9}$$

A mesma análise é valida para o caso do comprimento característico, utilizado na adimensionalização da coordenada normal à parede, o que é dado por:

$$L_c = \frac{\lambda}{u_c} \tag{10}$$

Uma vez obtidos os parâmetros característicos do escoamento na subcamada viscosa, pode-se então, utilizando argumentos de análise dimensional, avaliar o comportamento do perfil de velocidade média na região, onde as tensões turbulentas são as principais responsáveis pelo transporte de quantidade de movimento, nessa região (L. Rosenhead, 1988 ) a vorticidade média $\overline{w}$ deve ser função dos seguintes parâmetros:

$$\overline{w} = f\left(\overline{w}_p, L_{c,\,y}\right) \tag{11}$$

onde $\overline{w}_p$ é a vorticidade média na parede, isto implica que a vorticidade média na região completamente turbulenta junto à superfície sólida deve ser descrita por:

$$\overline{w} = \frac{1}{k}\frac{\overline{w}_p L_c}{y} \tag{12}$$

onde $1/k$ é um coeficiente de proporcionalidade e k=0,41 utilizando a hipótese de camada limite e a equação (5), podemos rescrever a relação (12) da forma:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \frac{1}{k}\frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{y} \tag{13}$$

Resolvendo a equação acima obtêm-se a seguinte relação para o perfil de velocidade:

$$\overline{u} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{k}\left[\ln\left(\frac{y}{L_c}\right) + 2{,}2\right] \tag{14}$$

Na expressão acima, a constante de integração foi obtida assumindo-se que a equação (14) deve descrever o caso Newtoniano quando $\tau_o$ =0.

## 3. A EQUAÇÃO DO ATRITO

Uma relação para o coeficiente de atrito do fluxo sanguíneo no interior de um duto de raio R pode ser obtida utilizando-se a equação (14) na sua forma adimensional, a qual é mostrada abaixo para y=R:

$$\frac{1}{\frac{u_c}{V}} = \frac{1}{0{,}41}\left[\ln\left(\frac{u_c}{V}\mathrm{Re}\right) - 0{,}06186\right] \tag{15}$$

onde, V é a velocidade média do escoamento e Re é o número de Reynolds, tendo como base o diâmetro do duto (D) e a velocidade média. A obtenção da equação (15) foi feita de modo semelhante a dedução da equação de Nikuradse para tubos lisos e fluidos Newtonianos, sendo que a principal diferença desta formulação consiste na obtenção do fator de atrito a partir do parâmetro $u_c/V$ através da seguinte relação:

$$f = 8\left(\frac{u_c}{V} + \frac{\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{V}\right)^2 \tag{16}$$

onde f é o fator de atrito de Fanning.

## 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Será feita agora uma análise da influência da tensão inicial sobre a tensão na parede e no perfil de velocidade da equação (16). Na tabela 1 é mostrada a variação do fator de atrito de Fanning para vários valores do número de Reynolds e da tensão inicial $\tau^*$. Nota-se o crescimento do fator de atrito provocado pelo aumento da tensão inicial causando uma maior dificuldade do escoamento do sangue. Este fato indica que para valores elevados da tensão inicial o trabalho feito por uma bomba (coração) para proporcionar o escoamento do sangue deve também ser elevado principalmente em dutos de pequenos diâmetros ou baixos números de Reynolds como pode ser visto na tabela 1. Outra importante conseqüência, seria os danos causados pelo aumento de pressão necessário para permitir o escoamento de sangue com grandes fatores de atrito. Este fato poderia causar o rompimento de veias ou artérias levando a graves conseqüências. Neste caso a equação (16) poderia ser utilizada para a obtenção de valores ou intervalos aceitáveis da tensão inicial relacionando-se a pressão necessária para o escoamento com os valores máximos de tensão suportáveis pelas paredes das artérias.

**Tabela 1. Valores do fator de atrito ( f ) de acordo com o número de Reynolds ( Re ) e a tensão inicial adimencionalizada** ( $\tau^*$ )

| | $\tau^* = \sqrt{\frac{\tau_o D}{V\lambda_o}}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Re** | **0** | **0.24** | **0.35** | **0.55** | **0.65** |
| 5000 | 0.03991 | 0.04383 | 0.04569 | 0.04918 | 0.05097 |
| 7500 | 0.03553 | 0.03854 | 0.03997 | 0.04262 | 0.04398 |
| 10000 | 0.03282 | 0.03532 | 0.03650 | 0.03869 | 0.03982 |
| 12500 | 0.03093 | 0.03310 | 0.03412 | 0.03602 | 0.03698 |
| 15000 | 0.02950 | 0.03143 | 0.03233 | 0.03402 | 0.03487 |
| 17500 | 0.02835 | 0.03010 | 0.03100 | 0.03245 | 0.03322 |
| 20000 | 0.02742 | 0.02903 | 0.02978 | 0.03118 | 0.03189 |

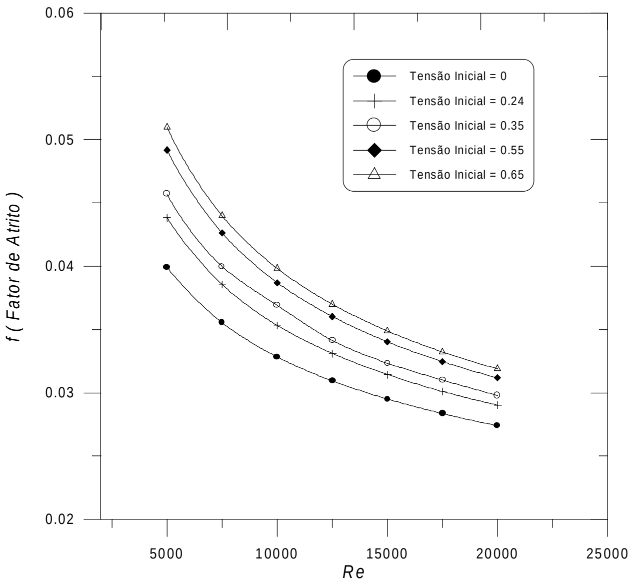


Figura 1 – Variação do Fator de Atrito de acordo com o número de Reynolds

Na figura 2 é mostrada a variação do perfil de velocidade para vários valores do número de Reynolds. A velocidade característica não varia com a tensão inicial adimensionalizada $\tau^*$

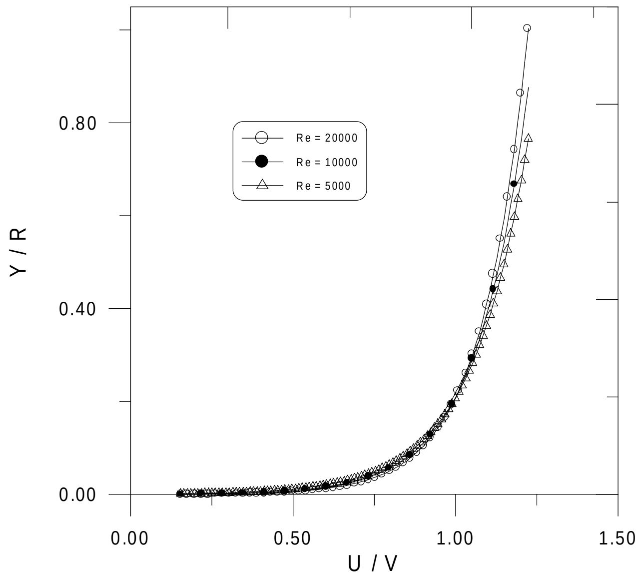


Figura 2 – Perfis de Velocidade

## 5. CONCLUSÃO

No presente trabalho uma análise do escoamento turbulento de sangue próximo a superfícies sólidas foi apresentada, utilizando o modelo reológico de Casson para descrever o comportamento das tensões viscosas. Foi deduzida uma expressão para descrever a variação da velocidade média na região completamente turbulenta, sem a utilização de um modelo de turbulência para descrever as tensões turbulentas. Através dessa equação, foi deduzida uma relação para o fator de atrito de Fanning válida para o escoamento turbulento de sangue em dutos. Foi mostrado que o acréscimo da tensão inicial provoca um aumento do fator de atrito o que pode causar diversas patologias.

A Eq. (16) pode ser utilizada em diversas aplicações, desde condição de contorno para escoamentos turbulentos complexos como os que ocorrem no interior do coração e através de válvulas, artificiais ou não, até casos mais simples como o cálculo da queda de pressão provocada pelo escoamento de sangue no interior de dutos. Vale ressaltar que uma comparação detalhada com dados experimentais deve ser feita, principalmente para a determinação das constantes que aparecem na equação (14).

***Agradecimentos***

Os Autores agradecem a FAPEMIG pelo apoio financeiro, concedido através da bolsa de auxílio a pesquisa ref. TEC 969/96.

## REFERÊNCIAS

Colebrook, C. F., 1938, Turbulent flow in Pipes, vol. 11, pp. 133-156, London.

Casson, N., 1959, In rheology of disperse systems, P. 84, ed. Pergamon Press C. C. Mill, New York

Oka, S., 1965, In Proc. of the Fourt International Congress on Rheology, ed. AL. Copley, part. 4, PP. 81-92 , Wiley, New York

Brasil, A. C. P. J., Rosa, O. L. S. e Severo, C. A., 1998, Simulação por elementos finitos de escoamento de sangue, V Congresso Norte Nordeste de Engenharia Mecânica, Ceará.

Rosenhead, L., 1988, Laminar boundary layers, ed. Dover Publications, Inc., New York.

Stoltz, J. F., Streife, F. et Largan, A., 1970, Étude des curbes d'écoulement pour un fluide obeíssant à l'équation de Casson. Application au sang, vol. 9, N$^{o}$ 1, Journal de Mécanique.

Rodkiewicz, C. M., Sinha, P. and Kennedy, J. S., 1990, On the Aplication of a Constitutive Equation for Whole Human Blood, vol. 112, Journal of Biomechanical Engineering, ASME.

Liepsch, D. W., 1986, "Flow in Tubes and Arteries – A Comparison", Biorheology, vol. 23, p. 395.

Caro, C. G., Pedley, T. J., Schroter, R. C. and Seed, W. A., 1978, The Mechanics of the Circulation, Chapter 10, p. 177, Oxford University Press, Oxford.

# A FIRCTION EQUATION FOR TURBULENT BLOOD FLOWS

**DANIEL A. CRUZ.**

**JERSON R. P. VAZ**

Mechanical Engineering Department – CT/UFPA
Campus Universitário do Guamá – 66075-900 – Belém – PA – Brazil

***Key words:*** Turbulence, blood, ducts

***Abstract.*** The analysis of turbulent flows of non Newtonian fluids is still one of the greatest problems in fluid mechanics. In spite of its importance, very few works can be found in the literature that analyses in detail the behavior of such flows. Among these problems, the blood flow in veins and arteries is one of great significance, not only for scientific studies but also for more practical applications such as the project and construction of artificial organs and the diagnostic of infirmities. Many reological models are employed in the description of blood flows, one the most popular is the model developed by Casson. In the present work an extension of the friction equation, originally developed for Newtonian fluids, and which can be applied in the turbulent blood flow in duct will be deduced, using the reological model proposed by Casson. The deduction will be made using some dimensional arguments and no turbulence model will be employed. It will be shown, that the proposed formulation has an logaritimical behavior, and also a comparison with the Newtonian case will be made.